Productos Internos

24/06/2011

Si $\vec{x} = (x_1, x_2)$ e $\vec{y} = (y_1, y_2)$

El producto interno $\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2)$

$\vec{x} \cdot \vec{y} \quad (\vec{x}, \vec{y}) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$

Ej: $\vec{x} = (-2, 3)$; $\vec{y} (1, -5)$

$\vec{x} \cdot \vec{y} = (-2, 3) \cdot (1, -5)$

$= -2 \cdot 1 + 3 \cdot -5$

$= -2 + -15$

$= -17$

Observación: El producto interno de un vector por sí mismo se escribe

$$\vec{X} \cdot \vec{X} = \vec{X}^2$$

$$\vec{X} \cdot \vec{X} = (X_1, X_2) \cdot (X_1, X_2)$$

$$\vec{X} \cdot \vec{X} = X_1^2 + X_2^2$$

Recordamos que:

$$\|\vec{X}\| = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} \;\Big/ (\;)^2$$

$$\|\vec{X}\|^2 = X_1^2 + X_2^2 = \vec{X} \cdot \vec{X}$$

$$\|\vec{X}\|^2 = \vec{X} \cdot \vec{X}$$ (la norma de un vector al cuadrado es igual al producto interno de un vector por sí mismo).

Ángulo entre vectores

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son 2 vectores:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

Ejemplo:

Si $\vec{u} = (1, 2)$ y $\vec{v} = (-1, 3)$

$$\cos \alpha = \frac{(1,2) \cdot (-1,3)}{\|(1,2)\| \cdot \|(-1,3)\|} = \frac{-1+6}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{50}} =$$

$$\|(1,2)\| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$$

$$\|(-1,3)\| = \sqrt{(-1)^2+3^2} = \sqrt{10}$$

$$\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{50}} = 0,707$$

$$\cos \alpha = 0,707$$

$$\alpha = \cos^{-1}(0,707)$$

$$\boxed{\alpha = 45°}$$

Comprobación

$$\cos \alpha = \frac{5\sqrt{50}}{50} = \frac{\sqrt{50}}{10} = \frac{\sqrt{25 \cdot 2}}{10} = \frac{\sqrt{25} \cdot \sqrt{2}}{10} =$$

$$\frac{\cancel{5}\sqrt{2}}{\cancel{10}\,2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

¿Qué ángulo tiene $\cos = \frac{\sqrt{2}}{2}$?

$$\boxed{\alpha = 45°}$$

Ejemplo 2: Si $\vec{u} = (1, K)$ y $\vec{v} = (1, 1)$

Determine el valor de K para que el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea $60°$.

$$\cos 60° = \frac{(1,K)\cdot(1,1)}{\|(1,K)\cdot(1,1)\|} \qquad \|(1,K)\| = \sqrt{1^2+K^2}$$

$$\|(1,1)\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos 60° = \frac{1+K}{\sqrt{1+K^2}\cdot\sqrt{2}} = .$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1+K}{\sqrt{2(1+K^2)}}$$

$\longrightarrow$

$$\frac{1}{2} = \frac{1+K}{\sqrt{2(1+K^2)}} = \sqrt{2(1+K^2)} = 2(1+K)$$ (multiplicar cruzado)

$$\sqrt{2+2K^2}^{\,2} = (2+2K)^2 \,/\, (\;)^2$$

$$0 = 4 - 2 + 8K + 4K^2 - 2K^2$$

$$0 = 2 + 8K + 2K^2$$

$$\boxed{2K^2 + 8K + 2 = 0}$$ ⇒ Ecuación de 2do grado.

$a = 2$
$b = 8$
$c = 2$

$$K = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2}$$

$$K = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 16}}{4} \qquad K = \frac{-8 \pm \sqrt{48}}{4}$$

$$\approx K_1 = \frac{-8 \pm 6,92}{4} = \frac{-1,08}{4} = -0,27$$

$$K_2 = \frac{-8 - 6,92}{4} = \frac{-14,92}{4} = -3,73$$

Si $\vec{x} = (2, 3)$ e $\vec{y} = (-2, k)$,

determine el valor de k para que el ángulo entre $\vec{x}$ e $\vec{y}$ sea $180°$.

$$\cos 180° = \frac{(2,3)\cdot(-2,k)}{\|(2,3)\cdot(-2,k)\|}$$

$$-1 = \frac{(2,3)\cdot(-2,k)}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{4+k^2}}$$

$$-1 = \frac{-4+3k}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{4+k^2}}$$

$$-1 = \frac{-4+3k}{\sqrt{13(4+k^2)}}$$

$$-1\cdot\sqrt{13(4+k^2)} = -4+3k$$

$$-1\cdot\sqrt{52+13k^2} = -4+3k \quad /()^2$$

$$(-1)^2\cdot(\sqrt{52+13k^2})^2 = (-4+3k)^2$$

$$1\cdot 52+13k^2 = (-4)^2+2\cdot-4\cdot3k+(3k)^2$$

$$52+13k^2 = 16-24k+9k^2$$

$$13k^2-9k^2+24k = 16-52$$

$$4k^2+24k = -36 \longrightarrow$$

$$\|(2,3)\| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$\|(-2,k)\| = \sqrt{(-2)^2+(k)^2} = \sqrt{4+k^2}$$

$$4k^2 + 24k = -36$$

$$4k^2 + 24k + 36 = 0 \quad | :4$$

$$k^2 + 6k + 9$$

$$(k+3)(k+3)$$

$$(k+3)^2 = 0$$

$$k = -3 \ ?$$

Ejercicios guía

1) ~~a,b~~ a)

$$(3, -5, 2) \cdot (4, 1, -2) =$$

$$= 3 \cdot 4 + -5 \cdot 1 + 2 \cdot -2$$

$$= 12 + -5 + -4$$

$$= 3 \ //$$

ortogonales → angulo 90° 2 vectores ortogonales prod. interno = 0

2) $\vec{u}$ $(1, K, -3)$ y $\vec{v}$ $(2, -5, 4)$

$$\cos 90° = \frac{(1, K, -3) \cdot (2, -5, 4)}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

$$0 = \frac{1 \cdot 2 + K \cdot -5 + -3 \cdot 4}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} =$$

$$2 - 5K - 12 = 0$$

$$-5K - 10 = 0$$

$$-5K = 10 \ / : -5$$

$$K = \frac{-10}{5}$$

$$\boxed{K = -2}$$

Conclusión: Si 2 vectores son ortogonales el producto interno de ellos es cero

$\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

↳ ortogonal

3) Encuentre la norma de b)

$(3, -12, -4)$

$$\|(3, -12, -4)\| = \sqrt{3^2 + (-12)^2 + (-4)^2}$$
$$= \sqrt{9+144+16}$$
$$= \sqrt{169}$$
$$= 13 _{/\!/}$$

4) Demuestre que $(4, -3, 2)$ y $(-8, 6, -4)$ son paralelos:

Si $\vec{u} \parallel \vec{v}$: existe un escalar K tal que

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3} = K$$

$$\frac{4}{-8} = \frac{-1}{2} \qquad \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2}$$

$$\frac{-3}{6} = \frac{-1}{2} \qquad \frac{4}{-8} = \frac{-3}{6} = \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2}$$

5) Escribir $(-3,5,-5)$ como combinación lineal de los vectores $(-1,1,0)$; $(0,1,-1)$ y $(1,0,2)$

Esto equivale a encontrar 3 escalares x, y, z tales que

$$(-3,5,-5) = x(-1,1,0) + y(0,1,-1) + z(1,0,2)$$

$$(-3,5,-5) = (-x, x, 0) + (0, y, -y) + (z, 0, 2z)$$

$$(-3,5,-5) = (-x+z,\ x+y,\ -y+2z)$$

$$\begin{array}{l} -x+z = -3 \\ x+y = 5 \\ -y+2z = -5 \end{array} \Rightarrow x = 5-y$$

$$-x+z = -3$$

$$-(5-y)+z = -3$$

$$-5+y+z = -3 \quad /+5$$

$$\boxed{y+z=2}$$

Sumar: ↓ ↓ ↓

$$-y + 2z = -5$$
$$y + z = 2$$

$$-y + y + 2z + z = -5 + 2$$
$$3z = -3 \quad | :+3$$
$$z = -1$$

$$y + z = 2$$
$$y + -1 = 2$$
$$\boxed{y = 3}$$

$$x + y = 5$$
$$x + 3 = 5 \quad | -3$$
$$\boxed{x = 2}$$

miercoles 6 : Solemne 3 cálculo

Lunes 11 : Solemne 2 : Ing. Software

Miercoles 13 : Solemne 2, inglés

Viernes 15 : Solemne 2 Algebra

Lunes 18 : Solemne 4 Redes ?

miercoles 27 : Examen Inglés / Exam redes?

Viernes 29 : Examen Algebra

(7) $A = 3i + 4j$; $B = 2i + 2j - k$

$C = 3i + 4k$

c) $\| A + B - C \| =$

$\| 3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k} - (3\hat{i} + 4\hat{k}) \|$

$= \| 5\hat{i} + 6\hat{j} - \hat{k} - 3\hat{i} - 4\hat{k}$

$= \| 2\hat{i} + 6\hat{j} - 5\hat{k} \|$

$= \sqrt{2^2 + 6^2 + (-5)^2}$ $\quad \hat{i} = (1, 0, 0)$

$= \sqrt{4 + 36 + 25}$ $\quad \hat{j} = (0, 1, 0)$

$= \sqrt{65}$ $\quad \hat{k} = (0, 0, 1)$

d) Con qué valores de q es $\| q B \| = 1$

$\| q \cdot B \| = \| q \cdot (2, 2, -1) \| = 1 \rightarrow$ ecuación

$\| (2q, 2q, -q) \| = 1$

$\sqrt{(2q)^2 + (2q^2) + (-q)^2} = 1$

$\sqrt{4q^2 + 4q^2 + q^2} = 1$

$\sqrt{9q^2} = 1 = \sqrt{9} \cdot \sqrt{q^2} = 1$

$3q = 1 = \boxed{q = \frac{1}{3}}$

Vectores Canónicos

En $\mathbb{R}^2$ los vectores canónicos son:

$\hat{i} = (1,0)$ y $\hat{j} = (0,1)$

Cualquier Vector $\mathbb{R}^2$ puede ser escrito como combinación lineal de $\hat{i}$ y $\hat{j}$

Ejemplo: $(-2,3) = (-2,0) + (0,3)$
$= -2(1,0) + 3(0,1)$

$$(-2,3) = -2\hat{i} + 3\hat{j}$$

En $\mathbb{R}^3$ los vectores canónicos son 3:

$\hat{i} = (1,0,0)$

$\hat{j} = (0,1,0)$

$\hat{k} = (0,0,1)$

Luego $(-2,3,-1) = (-2,0,0) + (0,3,0) + (0,0,-1)$

$(-2,3,-1) = -2(1,0,0) + 3(0,1,0) + -1(0,0,1)$

$(-2,3,-1) = -2\hat{i} - 3\hat{j} - 1\hat{k}$

$= -2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$