Vectores

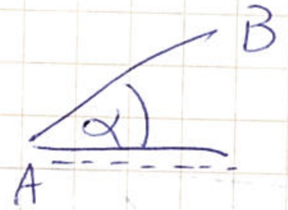
17/06/2011

Geométricamente, un vector es un segmento directo que tiene 3 características:

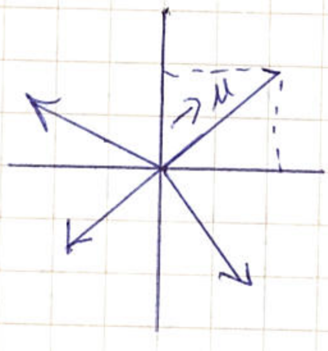
1) Longitud → (Norma, módulo, valor absoluto)

2) Dirección → ángulo α

3) Sentido → Va desde A (origen) hasta B (extremo)



Todo Vector puede ser representado en el plano cartesiano y para este curso trabajaremos sólo con vectores cuyo origen está en el punto (0, 0)

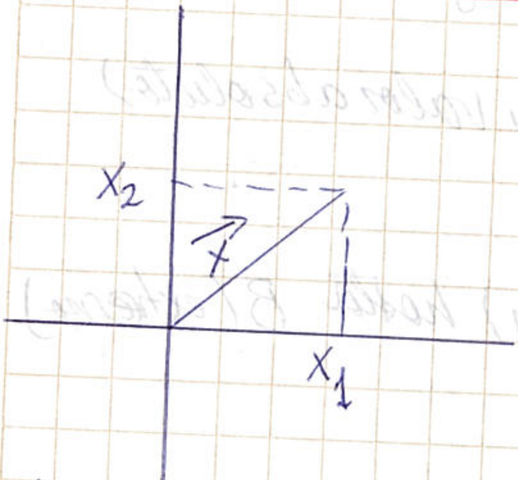


Esto permite representar algebraicamente solo usando las coordenadas de su extremo.

Ej: $\vec{u}$

Esta representación permite realizar con los vectores las siguientes operaciones:

1) Cálculo de la norma:



Algebraicamente $\vec{x} = (x_1, x_2)$

Luego, la norma del vector es:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Ejemplo:

Si $\vec{x} = \left(-3, \frac{1}{2}\right)$, $\|\vec{x}\| = \sqrt{(-3)^2 + (1/2)^2}$

$$= \sqrt{9 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{1} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{36+1}{4}} = \sqrt{\frac{37}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{37}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{37}}{2} \quad //$$

2) Suma de Vectores

Si $\vec{X} = (X_1, X_2)$ y $\vec{Y} = (Y_1, Y_2)$

entonces $\vec{X} + \vec{Y} = (X_1\ X_2) + (Y_1\ Y_2)$

$= (X_1 + Y_1, X_2 + Y_2)$

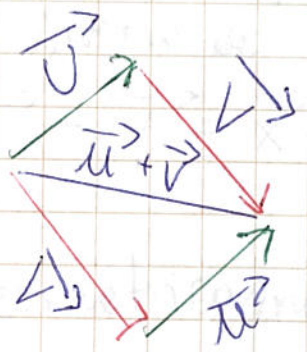
Ejemplo: $\vec{X} = (-2, 7)$ y $\vec{Y} = (-1, -9)$

$\vec{X} + \vec{Y} = (-2, 7) + (-1, -9)$

$= (-2 + -1, 7 + -9)$

$= (-3, -2)$

Geométricamente, sumar 2 vectores se refiere al siguiente proceso:

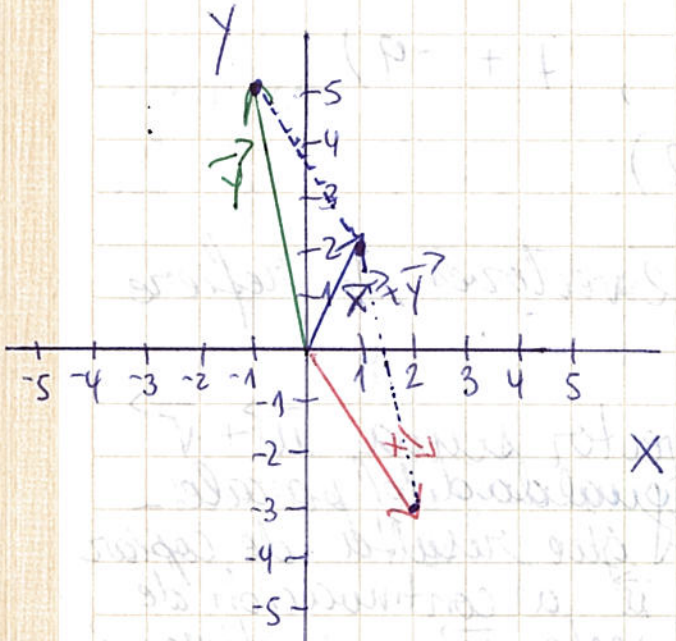


El vector suma $\vec{u} + \vec{v}$ es la diagonal del paralelógramo que resulta de copiar el vector $\vec{u}$ a continuación de $\vec{v}$ y el vector $\vec{v}$ a continuación de $\vec{u}$.

(Ley del Paralelógramo)

Ejercicio: Representar en el plano los vectores $\vec{x} = (2, -3)$ y $\vec{y} = (-1, 5)$ y el vector suma $\vec{x} + \vec{y}$.

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1\ x_2) + (y_1\ y_2)$$
$$= (2, -3) + (-1, 5)$$
$$= (2 + -1) + (-3 + 5)$$
$$= (1 + 2) = (1, 2)$$



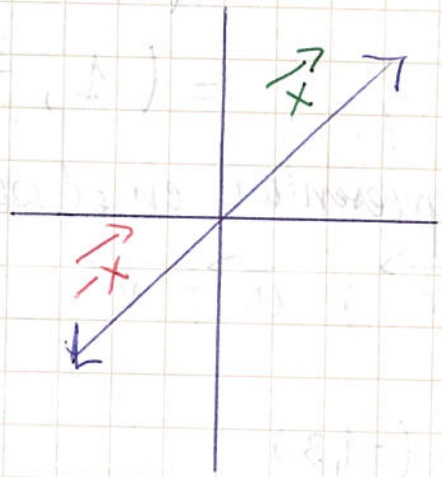
3) Inverso de un Vector:

Si $\vec{x} = (x_1, x_2)$ el inverso de $\vec{x}$ que se anota $\vec{-x}$, será el vector de Coordenadas:

$\vec{-x} = (-x_1, -x_2)$, al sumar

$\vec{x} + \vec{-x} = (0, 0)$

geométricamente:

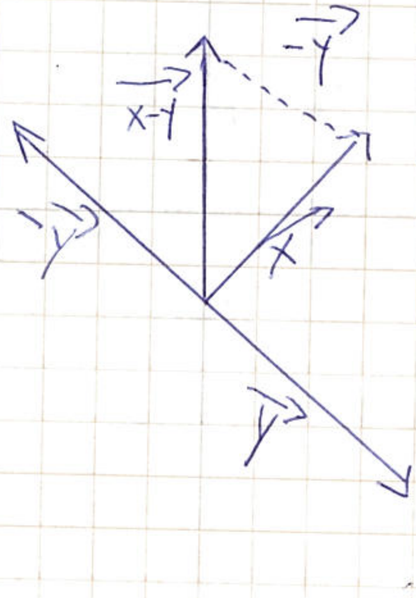


4) Resta de Vectores

Si $\vec{x} = (x_1, x_2)$ y $\vec{y} = (y_1, y_2)$, la resta $\vec{x} - \vec{y}$ es igual a sumar al vector $\vec{x}$, el inverso de $\vec{y}$, es decir:

$\vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + \vec{-y}$

geométricamente,



Ejemplo: Si $\vec{u} = (-1, 3)$ y $\vec{v} = (-2, 5)$

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$
$$= (-1, 3) + (2, -5)$$
$$= (-1+2, 3+-5)$$
$$= (1, -2)$$

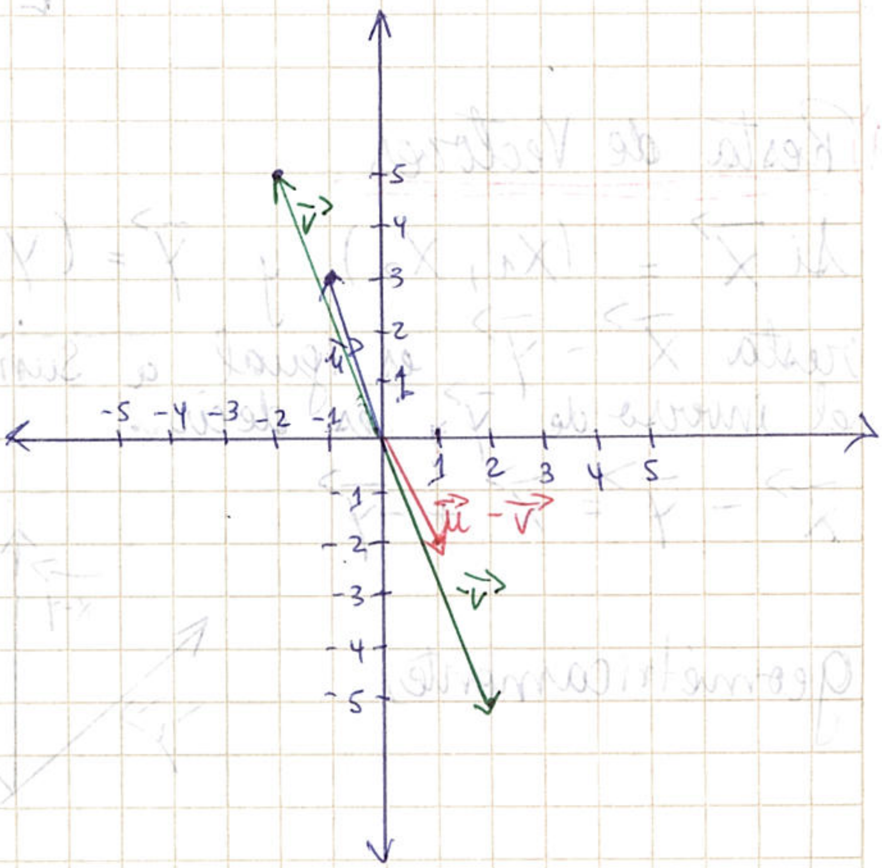
Representar en el plano los vectores: $\vec{u}$; $\vec{v}$; $-\vec{v}$; $\vec{u} - \vec{v}$

$\vec{u} = (-1, 3)$

$\vec{v} = (-2, 5)$

$-\vec{v} = (2, -5)$

$\vec{u} - \vec{v} = (1, -2)$



5) Ponderación → Multiplicación por escalar

Si $\vec{X} = (X_1, X_2)$ y K un escalar, la ponderación $K \cdot \vec{X} = (K \cdot X_1, K \cdot X_2)$

Ejemplo:

$\vec{X} = (-2, 7)$ y $K = 1/2$

$$K \cdot \vec{X} = \frac{1}{2}(-2,7) = \left(\frac{1}{2} \cdot -2, \frac{1}{2} \cdot 7\right)$$

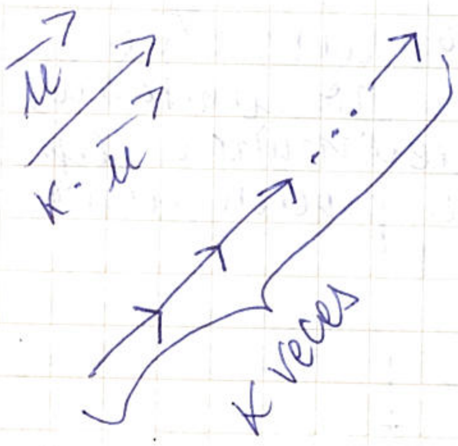
$$= \left(\frac{-2}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

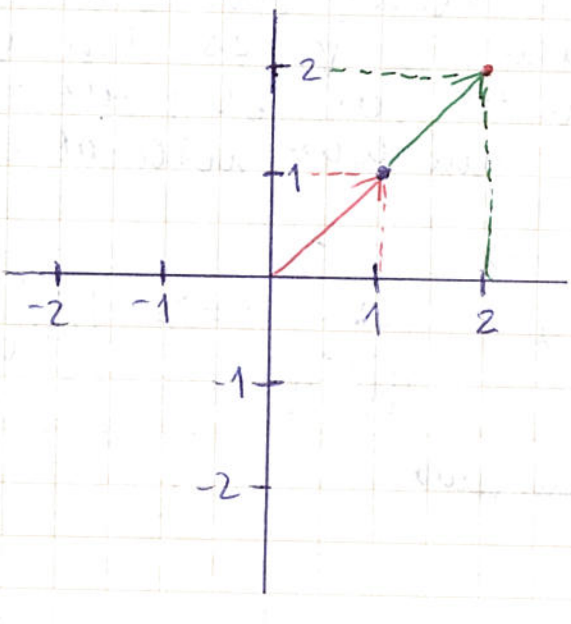
$$= \left(-1, \frac{7}{2}\right)$$

Geográficamente

Ej: $2 \cdot (1,1) = (2,2)$

$k=2$





6) **Vector Unitario**: Un vector es unitario si su norma es 1.

Ejemplo: $\overrightarrow{U} = \left(1/2, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\|\overrightarrow{U}\| = \sqrt{(1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}$$
$$= \sqrt{\frac{4}{4}} = 1_{//}$$

Por lo tanto, $\overrightarrow{U}$ es unitario

Todo vector tiene asociado un vector unitario, si $\overrightarrow{v}$ es un vector no unitario, a partir de él podemos determinar un vector unitario usando el sgte. procedimiento.

$$\underbrace{\overrightarrow{V_u}}_{\overrightarrow{V}\text{ normalizado}} = \frac{\overrightarrow{V}}{\|\overrightarrow{V}\|} \Rightarrow \|\overrightarrow{V_u}\| = 1$$

Ejemplo: $\vec{V} = (1,1) \Rightarrow \|\vec{V}\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$\boxed{\vec{V_u} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}} \qquad \frac{1}{\|\vec{V}\|} \cdot \vec{V} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1,1)$$

$$\vec{V_u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\|\vec{V_u}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \|\vec{V_u}\| = \sqrt{\frac{2}{2}} = \sqrt{1} = 1 //$$

7) Combinación lineal

Una combinación lineal de vectores es una estructura algebraica que se obtiene de la siguiente forma.

Considere α y β escalares y "X" e "Y" vectores, entonces un vector $\vec{V}$ determinado mediante combinación lineal sería:

$$\boxed{\vec{V} = \alpha \cdot \vec{X} + \beta \cdot \vec{Y}}$$

Ejemplo: Si $\alpha = 3$ y $\beta = 5$;

$\vec{X} = (1, 1)$ y $\vec{Y} = (2, -3)$

Obtener la combinación lineal

$\vec{V} = \alpha \cdot \vec{X} + \beta \cdot \vec{Y}$

$\vec{V} = 3 \cdot (1, 1) + 5 \cdot (2, -3)$

$\vec{V} = 3, 3 \quad + \quad 10, -15$

$\vec{V} = (3 + 10), (3 + -15)$

$\vec{V} = (13), (-12)$

$\vec{V} = (13, -12)$

Luego se dice que el vector $\vec{V}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{X}$ e $\vec{Y}$ con los escalares α y β.

Ejercicios: Obtener las Combinaciones:

$\vec{W} = \alpha \cdot \vec{Y} + \beta \cdot \vec{X}$

$\vec{Z} = 2\beta \cdot \vec{X} - 3\alpha \cdot \vec{Y}$

$\alpha = 3 \qquad X = (1, 1)$

$\beta = 5 \qquad Y = (2, -3)$

① $\vec{W} = \alpha \cdot \vec{y} + \beta \cdot \vec{x}$

$\vec{W} = 3 \cdot (2,-3) + 5 \cdot (1,1)$

$\vec{W} = (6,-9) + (5,5)$

$\vec{W} = (6+5), (-9+5)$

$\boxed{\vec{W} = (11, -4)}$ //

② $\vec{Z} = 2\beta \cdot \vec{x} - 3\alpha \cdot \vec{y}$

$\vec{Z} = 2 \cdot 5 \cdot (1,1) - 3 \cdot 3 \cdot (2,-3)$

$\vec{Z} = 10(1,1) - 9(2,-3)$

$\vec{Z} = (10,10) - (18,-27)$

$\vec{Z} = (10,10) + (-18, 27)$

$\vec{Z} = (10+-18), (10+27)$

$\boxed{\vec{Z} = (-8, 37)}$ //

Ejercicios: Compruebe que el vector $(11, 1)$ es combinación lineal de los vectores $(1, 2)$ y $(3, -1)$.

Este ejercicio equivale a comprobar que existen escalares alfa y beta (α, β) tales que:

$(11, 1) = \alpha (1, 2) + \beta (3, -1)$

$(11, 1) = (\alpha, 2\alpha) + (3\beta, -\beta)$

$(11, 1) = (\alpha + 3\beta), (2\alpha + -\beta)$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + 3\beta = 11 \\ 2\cdot\alpha - \beta = 1 \end{array}\right\}$$ Aplicar sistema ecuaciones para descubrir incógnitas α y β.

1) $\alpha + 3\beta = 11$
2) $2\alpha - \beta = 1$

* En una ecuación despejamos una de las variables.
Ej: (en (1) despejamos α).

$\alpha = 11 - 3\beta$, luego reemplazamos la expresión obtenida en la otra ecuación:

$2 \cdot \alpha - \beta = 1$

$2 \cdot (11 - 3\beta) - \beta = 1$

$22 - 6\beta - \beta = 1$

$22 - 7\beta = 1$

$-7\beta = 1 - 22$

$-7\beta = 1 - 22 \;/ \cdot -1$

$7\beta = -1 + 22$

$7\beta = 21$

$\beta = \frac{21}{7} = \boxed{\beta = 3}$

Sigue

Ahora, reemplazamos el valor obtenido en cualquier ecuación

$\alpha = 11 - 3\beta$

$\alpha = 11 - 3 \cdot 3$

$\alpha = 11 - 9$

$\alpha = 2$

Hemos obtenido que el vector (11, 1)...

$(11, 1) = 2(1, 2) + 3(3, -1)$

$= (2, 4) + (9, -3)$

$= (2 + 9), (4 - 3)$

$= (11, 1)$

Tarea: Compruebe que el vector $\vec{V} = (2, 1)$ es combinación lineal de los vectores:

$\vec{X} = (3, -2)$ y $\vec{Y} = (1, 4)$

α y $\beta \frac{1}{2}$

Desarrollo:

$$(2,1) = \alpha\,(3,-2) + \beta(1,4)$$

$$(2,1) = (3\alpha, -2\alpha) + (\beta, 4\beta)$$

$$(2,1) = (3\alpha + \beta), (-2\alpha + 4\beta)$$

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta = 2 \\ -2\alpha + 4\beta = 1 \end{cases}$$

$$\beta = 2 - 3\alpha$$

$$-2\alpha + 4\cdot(2 - 3\alpha) = 1$$

$$-2\alpha + 8 - 12\alpha = 1$$

$$-14\alpha + 8 = 1$$

$$-14\alpha = 1 - 8$$

$$-14\alpha = -7 \quad |\cdot -1$$

$$\boxed{\alpha = \frac{7}{14}} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\beta = 2 - 3\cdot\frac{1}{2}$$

$$\beta = \frac{2}{1} - \frac{3}{2} = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\beta = \frac{1}{2}}$$

Entonces

$$(2,1) = \frac{1}{2}\cdot(3,-2) + \frac{1}{2}(1,4)$$

$$(2,1) = \left(\frac{3}{2}, \frac{-2}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}, \frac{4}{2}\right)$$

$$(2,1) = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right), \left(\frac{-2}{2} + \frac{4}{2}\right)$$

$$(2,1) = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right), \left(-1 + 2\right)$$

$$(2,1) = \left(\frac{4}{2}\right), (1)$$

$$(2,1) = (2,1) \checkmark$$